Cvičení MAI 3 – Konvergence posloupností funkcí

Teoretický základ:

Def: $f_n, f : M \to R(\mathbb{C})$, $M \neq \emptyset$, $n \in N$

- $f_n \to f$ (bodově) na $M \stackrel{def}{\equiv} \forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  ($n_0 = n_0(\varepsilon, x)$)
- $f_n \rightrightarrows f$ (stejnoměrně) na $M \stackrel{def}{\equiv} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  ($n_0 = n_0(\varepsilon)$)
- $f_n \stackrel{loc}{\rightrightarrows} f$ (lokálně stejn.) na $M \stackrel{def}{\equiv} \forall x \in M\ \exists \mathcal{U}(x) : f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x)$

Pozn.: $f_n \rightrightarrows f$ na $M \Rightarrow f_n \stackrel{loc}{\rightrightarrows} f$ na $M \Rightarrow f_n \to f$ na M

Vyšetřování konvergence $\{f_n\}$ na $M \neq \emptyset$

1) <u>bodová konvergence</u> – výpočet limity posloupností pro $x \in M$
   (x - pevné – $f_n(x)$ číselná posloupnost)

2) <u>stejnoměrná konvergence na M</u>

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na $M \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$

(ii) $\exists \alpha_n, n \in N$ tak, že $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ pro $\forall x \in M$
a $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na M

(iii) (Bolzano - Cauch. podmínka) (stejnoměrná)
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

(iv) nutné podmínky stejnoměrné konvergence:
1) $f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou omezené na $M \Rightarrow f$ je omezená na M
2) $f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou spojité na $M \Rightarrow f$ je spojitá na M
(důkaz na přednášce)
(hodí se k vyloučení stejn. konvergence na M)

3) lokálně stejnoměrná konvergence

(i) často se užívá takto: (jednodušší):

$M = (a,b)$, $f_n \rightrightarrows f$ na každém uzavřeném intervalu $\langle \alpha,\beta \rangle \subset (a,b)$ $\Rightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)

(ii) platí také: („těžké")

$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) $\Longrightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu $\langle \alpha,\beta \rangle \subset (a,b)$

4) „Záměna limit" u posloupností funkcí

V. (Moore-Osgood):

$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_n \rightrightarrows f \text{ v } P(x_0) \quad (x_0 \in R,\ x_0 = \pm\infty) \\ 2)\ \text{ex. } \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \end{array}\right\} \Rightarrow$ ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$)

(analog. pro limity jednostranné)

Důsledky

1) $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), f_n spojité na (a,b) $\Rightarrow$ f je spojitá na (a,b)

2) $\left.\begin{array}{l} f_n \in R(\langle a,b\rangle),\ n \in N \\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } \langle a,b \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f \in R(\langle a,b\rangle)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$)

3) $f_n : (a,b) \to R$ ((a,b) – omezený interval), ex. $f_n' \in R$ na (a,b)
a $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b), a ex. $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje;
potom platí: $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ na (a,b) a $f'(x) = g(x)$ na (a,b)

Cvičení teoretická:

1. Dokažte, že platí:

$$f_n \rightrightarrows f,\ g_n \rightrightarrows g \text{ na } M \Rightarrow f_n \pm g_n \rightrightarrows f \pm g \text{ na } M$$

$$c \in R,\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Rightarrow c f_n \rightrightarrows c f \text{ na } M$$

2. Dokažte:

$f_n \rightrightarrows f$ na M, f_n jsou funkce omezené na M pro $\forall n \in N \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ je omezená na M

3. Ukažte, nebo vyvraťte:

na M: $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g \Rightarrow f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ na M

4. Pokud $f_n, f : (a,b) \to R$ ($n \in N$ a (a,b) je omezený interval) mají na (a,b) primitivní funkce F_n, F, lze něco tvrdit o $\lim_{n\to\infty} F_n$, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b)?

Příklady:

1. $\underline{f_n(x) = x^n,\ n \in N,\ x \in \langle 0,1\rangle}$

(bylo na přednášce, místo zde podrobněji)

bodová limita: $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

odtud: $x^n \not\rightrightarrows$ na $\langle 0,1\rangle$, neboť limita je nespojitá funkce

z definice: $x^n \overset{?}{\rightrightarrows} 0$ na $\langle 0,1)$ – může zde být konvergence stejnoměrná??

tj. ? $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in \langle 0,1)$: $|x^n| < \varepsilon$

$\underset{x\in(0,1)}{?}\ x^n<\varepsilon \iff ?\ n\ln x<\ln\varepsilon \iff n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$

pro $x\to 1-$ je $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}=+\infty$, tedy nelze zvolit n_0 tak, aby pro vš. $n>n_0$ a $x\in(0,1)$ platilo $x^n<\varepsilon$

<u>stejné i n.a.p. podmínka stejnoměrné konvergence:</u>

$f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|=0$

$\sup\limits_{x\in(0,1)}x^n=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(0,1)}(x^n-0)=1\neq 0$, tedy

$x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$

<u>lokálně stejnoměrná konvergence</u>

$x\in\langle 0,a\rangle$, $0<a<1$, pak

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\langle 0,a\rangle}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, tedy $x^n\rightrightarrows 0$ na každém intervalu $\langle 0,a\rangle$, $a<1$, a tedy $x^n \overset{\text{lok}}{\rightrightarrows} 0$ na $\langle 0,1)$

(<u>Pozn.</u> konvergence není lokálně stejnoměrná na $\langle 0,1\rangle$ – – v případě kompaktního intervalu $\langle 0,1\rangle$ z konvergence pak plyne i stejnoměrná!)

(2) <u>$f_n(x)=x^n(1-x)$, $x\in\langle 0,1\rangle$</u>

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n(1-x)=\underset{(\equiv f(x))}{0}$ pro $\forall x\in\langle 0,1\rangle$

(ii) vyšetříme, zda konvergence je stejnoměrná:

$\sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}|f_n(x)-f(x)|=\max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}x^n(1-x)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0 \Rightarrow$

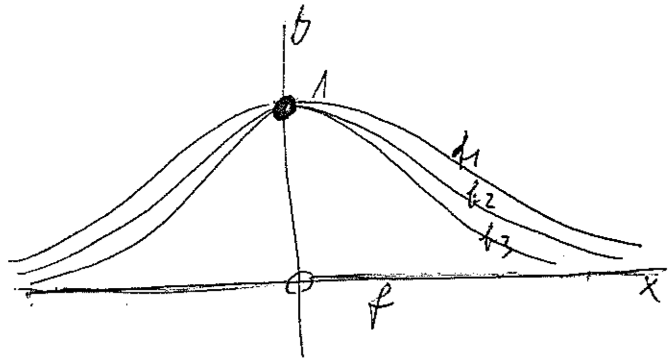
$\Rightarrow$ <u>$x^n(1-x)\rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1\rangle$</u>

Vysvětlení: $\max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} x^n(1-x)$ $\left(= \sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x)-0|\right)$ standardně:

$f_n(0)=f_n(1)=0$, $f_n(x)>0$ v $(0,1)$ $\Rightarrow$ max bude tam, kde $f_n'(x)=0$
ex. $f_n'(x)$ v $(0,1)$

$$f_n'(x) = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1}-(n+1)x^n = x^{n-1}[n-(n+1)\cdot x]$$

$$\underset{x\in(0,1)}{f_n'(x)=0} \iff x_n = \frac{n}{n+1}$$



(3) $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, $x\in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$

(ii) $f_n(x)$ jsou funkce spojité na R, limita $f(x)$ je fce nespojitá v $x=0$ $\Rightarrow$ $f_n \not\rightrightarrows f$ na R

(iii) ? konvergence v $(0,+\infty)$ (analog v $(-\infty,0)$ – $f_n(x)$ jsou sudé funkce)!

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1, \text{ tedy,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = 1, \text{ tedy } \frac{1}{(1+x^2)^n} \not\rightrightarrows 0 \text{ na } (0,+\infty)$$

(iv) ? lokálně stejnoměrná konvergence na $(0,+\infty)$ (resp. $(-\infty,0)$):

$x\in\langle a,+\infty)$, $a>0$;

$$\sup_{x\in\langle a,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in\langle a,+\infty)} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

(kles. fce na $\langle a,+\infty)$)

$\Rightarrow$ $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na každém int. $\langle a,+\infty)$, $a>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,+\infty)$ (i na $(-\infty,0)$ – stejně)

! ale $f_n(x) \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f(x)$ na R, neboť neex. žádné okolí bodu 0, ve kterém by $\{f_n(x)\}$ konvergovala stejnoměrně

<u>Poznámka:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+x^2)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^n} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0\end{array}\right\}\neq 0,$$

tedy (Moore-Osgood), na žádném $P(0)$ $f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně k $f(x)$

④ $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$ pro $\forall x\in R$

(ii) vyšetření stejnoměrné konvergence:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in R}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{(\to e)}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}}_{(\to 1)} = 0 \Rightarrow$$

$$f_n'(x) = \frac{2x(1+x^2)^n - x^2 n(1+x^2)^{n-1}\cdot 2x}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\left(1+(1-n)x^2\right)$$

$$f_n'(x)=0 \iff x=0 \ \vee\ x^2=\frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n>1$$

$$\max_{x\in R} f_n(x) \underset{n>1}{=} \frac{\frac{1}{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \rightrightarrows 0 \text{ na } R$$

⑤ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in R$: (jednoduchý příklad)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = 0$, $x\in R$ (věta o limitě sevřené posl.)

(ii) $\left|\dfrac{\sin nx}{n} - 0\right| \le \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0 \text{ na } R$$

(6) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x\in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0 \quad \forall x\in R$

(ii) $\sup\limits_{x\in R}|f_n(x)-0| = \sup\limits_{x\in R}\left|\sin\frac{x}{n}\right| = 1 \not\to 0 \Rightarrow$

$\left(= \max\left|\sin\frac{x}{n}\right| = f_n\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v R

(iii) ale: $x\in\langle -a,a\rangle$, pak

$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{x\in\langle-a,a\rangle}|f_n(x)-0| = \sup\limits_{x\in\langle-a,a\rangle}\left|\sin\frac{x}{n}\right| \leq \frac{a}{n}, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\langle -a,a\rangle$ pro lib. $a>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na R

Dú (7) $f_n(x) = n\cdot\sin\frac{x}{n}, \quad x\in R$ – Dú

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{x}{n} = x, \quad x\in R$

(ii) $\left.\begin{array}{l}f_n(x)=n\sin\frac{x}{n} \text{ ji fce omezená v } R\ (\forall n\in N) \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x \text{ – není omezená}\end{array}\right\} \Rightarrow$ konvergence není stejnoměrná v R

(iii) ukažte, že $n\cdot\sin\frac{x}{n} \rightrightarrows x$ na každém int. $\langle -a,a\rangle$, $a>0$,

tedy, $n\sin\frac{x}{n} \overset{loc}{\rightrightarrows} x$ na R

Dú (8) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx, \ x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (0,+\infty) \\ -\frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

(ii) limita funkcí spojitých na R je nespojitá $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows$ na R

(iii) vyšetřte, zda $\operatorname{arctg} nx \rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ na $(0,+\infty)$ (ne)
nebo aspoň lokálně stejnoměrně na $(0,+\infty)$ (ano)

Dú (9) $f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg} nx, \ x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2} \cdot x, \ x \in R^+$

(ii) ukažte, že $x \operatorname{arctg} nx \rightrightarrows \frac{\pi}{2} x$ na R^+

Poznámka k příkladu (8) – záměna limit:

$f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi}{2}$ v $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

ex. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(= \frac{\pi}{2}\right)$

ale **!**: $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg} nx = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

a $\lim\limits_{x\to 0+} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\Big\} \neq 0 \Rightarrow$

tedy f_n nekonvergují stejnoměrně na základním $P_+(0)$
(analog. pro $P_-(0)$)

Stejnoměrná konvergence posloupnosti fcí II

Další příklady:

(10) $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$, $x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x}{1+n^2x^2} = 0 \quad \forall x \in R$

(ii) stejnoměrná konvergence:

pro $x \neq 0$ odhadneme odhad shora (jako v příkladu 5):

$\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2|x|}$ – pro $|x| \geq a > 0$ dostaneme

$\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2|x|} \leq \dfrac{1}{n^2a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(-\infty, -a)$ a $(a, +\infty)$, ale

pro $x \to 0$ se odhad zhoršuje, v okolí 0 nelze nic říci –

– teď přesněji – (zkusíme $\max\limits_{x\in R}\left|\dfrac{2x}{1+n^2x^2}\right|$):

$\max\limits_{x\in R}|f_n(x)|$: $\quad f_n'(x) = 2 \cdot \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = \pm\dfrac{1}{n}$

$\max\limits_{x\in R}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n}}{1+1} = \dfrac{1}{n} \to 0$ pro $n\to\infty$,

tedy: $\dfrac{2x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v R

(11) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in R$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$, $x \in R$

(ii) $\max\limits_{x\in R} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \not\to 0 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows 0$ v R

(Pozn.: limita může být spojitá funkce, i když konvergence není stejnoměrná)

(iii) $v \ \langle a, +\infty), \ a > 0$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < a$, pro $n : n > n_0$ je $f_n(x)$ klesající fce v $\langle a, +\infty)$ $\left(f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n} \right)$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x \in \langle a, +\infty)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{2na}{1+a^2n^2} = 0 ,$$

tedy $\frac{2nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $\langle a, +\infty)$, a tedy

$$\frac{2nx}{1+n^2x^2} \overset{loc}{\rightrightarrows} 0 \quad v \quad (0, +\infty)$$

(analogicky se ukáže lok. stejn. konvergence i v $(-\infty, 0)$),
ale posloupnost nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí nuly.

Dú (12) $f_n(x) = \dfrac{2n^2x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{2}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

(ii) ukažte (podobně jako v př. 11), že
$f_n(x) \rightrightarrows \frac{2}{x}$ na int. $\langle a, +\infty)$ (a $(-\infty, -a\rangle$), $a > 0$,
tedy $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} \frac{2}{x}$ na $(0, +\infty)$ (a $(-\infty, 0)$), ale f_n
nekonvergují na $(0, +\infty)$ (ani na $(-\infty, 0)$) stejnoměrně

(nakreslete si f_n v příkladech 10, 11, 12)

Poznámka: všimněte si opět :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0\pm} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ &\lim_{x\to 0\pm} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{2}{x} = \pm\infty \end{aligned}\right\}$$ není zde záměna limit ! (f_n nekonverg. stejnoměrně v žádném P(0))

ale: ($x \to \infty$)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ &\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}\right\}$$ zde jsou splněny předp. věty Moore – Osgood

Dú (13) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \in R$

(i) $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} = 1$, $x \in R$

(ii) ukažte, že $f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} 1$ v R, ale ne stejnoměrně na R

(iii) ukažte, že $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Dú (14) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in R$

(i) $\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(ii) vysvětlete, proč $f_n \not\rightrightarrows$ v R, ani aspoň $f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows}$ v R
(ne – limita je nespojitá funkce)

(iii) najděte max. intervaly, kde konvergují f_n stejnoměrně, kde lokálně stejnoměrně

($f_n \rightrightarrows 0$ na každém int. $(-\infty,-a\rangle$, $\langle a,+\infty)$, $a>0$,
$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,+\infty)$ a $(-\infty,0)$)

Dú (15) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^2}$, $x \in R$

(i) Ukažte, že $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v R (lze jednoduše odhadem $|f_n(x)|$)

(ii) Přesvědčte se o záměně limit pro $x \to \infty$.

Ještě několik poznámek a příkladů k větám o „záměně limity a derivace" a „záměně limity a integrálu"

(viz str 2)

(1) $$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad x \in R$$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ v R $(\equiv f(x))$ (neboť $\left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) ($x \in R$)

ale posloupnost $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$ nemá limitu $f'(x) = 0$

(2) $$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in R$$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ v R (opět: pro $x \in R$: $\left|\frac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}\right| \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$),

tedy $f(x) = 0$ a $f'(x) = 0$ v R

ale: $$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1 \\ \text{neex.} & \text{pro } x = -1 \end{cases},$$

tedy, opět, i když $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v R, $f_n'(x)$ nekonvergují k $f'(x)$.

Je vidět, že $f_n'(x)$ nekonvergují stejnoměrně (ani lokálně stejn.) na R, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ není spojitá fce (a dokonce v $x=-1$ neex.)

Na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$ ale $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$, tedy zde už platí věta o „záměně limity a derivace":

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 = \left(\lim f_n(x)\right)', \quad x \in (0,1),\ x \in (1,+\infty)$$

(zatímco $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2} \neq \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} = 0$)

Dú ③ $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$, $x \in R$

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ na R (viz příklad 10), ale

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \text{tedy opět}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \left(\lim f_n(x)\right)'$$

ukazuje. (a pokuste se vyzkoušet, kde posloupnost $f_n'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně a kde lze uplatnit větu o záměně limity a derivace)

④ $f_n(x) = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$, $x \in R$

$f_n'(x) = 0$, tedy $f_n' \rightrightarrows 0$ v R, ale opět zde není záměna limity a derivace – neboť vynechal předpoklad o konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$ aspoň v jednom bodě ve větě „o záměně".

⑤ „Záměna limity a integrálu"

$f_n(x) = n \cdot x\, e^{-nx^2}$, $x \in \langle 0,1 \rangle$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot x\, e^{-nx^2} = 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0,1 \rangle, \text{ ale}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x e^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\left(e^{-nx^2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) = \tfrac{1}{2},$$

zatímco $\displaystyle\int_0^1 \lim f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$, tedy

$$! \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$$

Tedy, $\{f_n(x)\}$ nekonverguje stejnoměrně k 0 v $\langle 0,1\rangle$ – <u>ověřte</u>!
(lze opět užít n. a p. podmínku stejnoměrné konvergence)

(6) <u>Ale!</u> $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \langle 0,1\rangle$

$f_n(x) \to 0$ v $\langle 0,1\rangle$, ale ne stejnoměrně (viz příklad 11 z části I),

přesto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(1+n^2) = 0 = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$

$$\left(\int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n}\Big[\ln(1+n^2x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{n}\ln(1+n^2)\right)$$

Tedy, stejnoměrná konvergence $\{f_n\}$ na oboru integrace není podmínkou nutnou pro záměnu limity a R-integrálu.

<u>DÚ</u> (7) <u>Ještě k předchozímu příkladu:</u>

Ukažte také, že i když $\{f_n(x)\}$ nekonverguje lokálně stejnoměrně na žádném intervalu $(-a,a)$ $(a>0)$, lze zvolit primit. fce $F_n(x)$ k $f_n(x)$ $(x\in R)$ tak, že $F_n(x) \rightrightarrows 0$ v $(-a,a)$ (pro $\forall a>0$) a tedy $F_n(x) \overset{lok}{\rightrightarrows} 0$ v R.